

# MODELACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE LOS PRODUCTOS DE LA MOLIENDA DEL MINERAL LATERÍTICO

**Autor:** Victor A Quijano Arteaga

Estudiante. Departamento de Metalurgia. Facultad de Metalurgia–Electromecánica. Instituto Superior Minero Metalúrgico, Moa, Holguín, Cuba.

e-mail: [vquijano@metalurgia.ismm.edu.cu](mailto:vquijano@metalurgia.ismm.edu.cu)

**Coautor:** Dr. C. Alfredo L Coello Velázquez

Profesor Titular. Centro de Estudios de Energía y Alta Tecnología. Departamento de Metalurgia. Facultad de Metalurgia–Electromecánica. Instituto Superior Minero Metalúrgico, Moa, Holguín, Cuba.

e-mail: [acoello@ismm.edu.cu](mailto:acoello@ismm.edu.cu)

## RESUMEN

Una de las formas de medir el rendimiento de los circuitos de trituración/molienda es en términos de reducción de tamaño, por lo que es necesario medir las distribuciones de tamaños de los productos del circuito; estas a menudo se representan por medio de una función matemática. Existen numerosas funciones matemáticas para representar las distribuciones de tamaño, ejemplo de estos, son las funciones de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y Swebrec; considerando lo anterior, el objetivo del presente trabajo es evaluar el grado de ajuste de los diferentes modelos de representación de las distribuciones de tamaños, previo ajuste de los valores de los productos de la molienda mediante la determinación de la carga circulante.

Para dicho fin, se empleó el criterio estadístico de Cochran (C), la desviación o error estándar ( $\sigma$ ) y el coeficiente de correlación  $R^2$ . Los resultados muestran que los modelos de mayor ajuste, para la descarga del molino y el producto final, es el modelo de Rosin–Rammler y, para el producto recirculado, el modelo de Gaudin–Schuhmann.

## Palabras claves:

Molienda, modelo de distribución, carga circulante.

# THE SIZE DISTRIBUTION MODELING OF LATERITIC MINERAL MILLING PRODUCTS

**Author:** Victor A Quijano Arteaga

Student. Metallurgy Department. Faculty of Metallurgy-Electromechanics. Higher Metallurgical Mining Institute, Moa, Holguín, Cuba.

e-mail: [vquijano@metalurgia.ismm.edu.cu](mailto:vquijano@metalurgia.ismm.edu.cu)

**Coauthor:** Dr. C. Alfredo L Coello Velázquez

Associate Professor. Center for Energy Studies and High Technology. Metallurgy Department. Faculty of Metallurgy-Electromechanics. Higher Metallurgical Mining Institute, Moa, Holguín, Cuba.

e-mail: [acoello@ismm.edu.cu](mailto:acoello@ismm.edu.cu)

## ABSTRACT

It is in terms of size reduction one of the ways to measure the performance of crushing/milling circuits, so it is necessary to measure the size distributions of the products of the circuit; these are often represented by a mathematical function. There are numerous mathematical functions to represent size distributions, examples of these are the functions of Gaudin-Schuhmann, Rosin-Rammler and Swebrec; considering the above statements, the objective of the present work is to evaluate the degree of adjustment of the different models of representation of the size distributions, previous adjustment of the values of the products of the milling by determining the circulating load.

For this purpose, the Cochran statistical criterion (C), the deviation or standard error ( $\sigma$ ) and the correlation coefficient  $R^2$  were used. The results have shown that the models with the highest adjustment, for the discharge of the mill and the final product, are the Rosin-Rammler model and, for the recirculated product, the Gaudin-Schuhmann model.

## Keywords:

Grinding, distribution model, circulating load.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$C'$ : carga circulante, unidades.

$f'$ ,  $c$  y  $p$ : porcentaje en peso de la clase  $i$  en la descarga del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

$\epsilon$ : error residual.

$f'_r$ ,  $c_r$  y  $p_r$ : porcentaje en peso ajustado de la clase  $i$  en la descarga del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

$\epsilon'_f$ ,  $\epsilon_c$  y  $\epsilon_p$ : residuos de la clase  $i$  en la descarga del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

$\lambda$ : multiplicador de Lagrange.

$P(x)$ : pasante acumulado para un tamaño  $x$ , %.

$x$ : tamaño de la partícula, unidades.

$k$ : módulo de tamaño de Gaudin–Schuhmann para el cual  $P(x)$  es igual al 100 %.

$m$ : módulo de distribución de Gaudin–Schuhmann.

$a$ : módulo de tamaño de Rosin–Rammler para el cual  $P(x)$  es igual al 63,2 %.

$n$ : módulo de distribución de Rosin–Rammler.

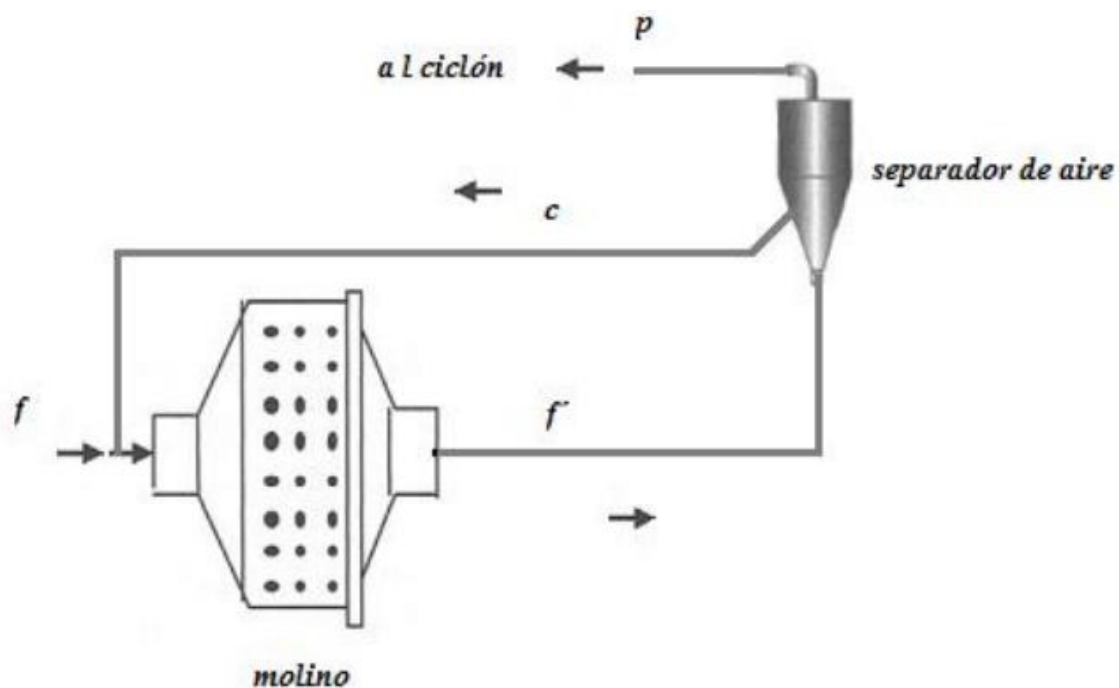
$x_{\max}$ : tamaño de partícula límite para el cual  $P(x)$  es igual al 100 %.

$x_{50}$ : tamaño de partícula media para el cual  $P(x)$  es igual al 50 %.

$b$ : parámetro de ondulación de la función Swebrec.

## 1 INTRODUCCIÓN

El esquema tecnológico de la sección de molienda de la Empresa “Cmtd. Ernesto Che Guevara” incluye una operación de molienda en circuito cerrado con un separador de aire, figura 1, y dos etapas de precipitación de polvos en baterías de ciclones con un electro-filtro (Coello, 1993). En estos esquemas, el proceso de fragmentación se ve afectado no solo por las fluctuaciones de las propiedades físicas y físico-mecánicas del mineral en la alimentación, sino también por una gama de factores tecnológicos que incluyen la carga circulante (Coello, 2015).



**Figura 1** Esquema simplificado del circuito de molienda. Fuente: Coello (1993)

En un circuito cerrado de trituración/molienda, la acumulación de material en el interior del molino, sin ser una suma exacta de la productividad inicial y la carga circulante, define el desarrollo del proceso no solo en el orden cualitativo, sino también cuantitativo (Coello, et al., 1994). Así que la calidad y cantidad del producto final es función de dicha variable.

La carga circulante calculada a partir de los resultados del muestreo de la descarga del molino y los productos del clasificador, para el cual el error residual ( $\epsilon$ ) es mínimo se determina mediante (Coello, 2015):

$$c' = \frac{\sum_{i=1}^n (p - f')(f' - c)}{\sum_{i=1}^n (f' - c)^2} \quad (1)$$

Por tanto, el error residual mínimo es:

$$\epsilon = f'(1 - C') - p - C'c \quad (2)$$

Los valores ajustados de los parámetros de la ecuación (1) con sus respectivos residuos se obtienen mediante:

$$f'_r = f' - \epsilon_{f'} \quad (3)$$

$$\epsilon_{f'} = \lambda(1 + C') \quad (4)$$

$$p_r = p - \epsilon_p \quad (5)$$

$$\epsilon_p = -\lambda \quad (6)$$

$$c_r = c - \epsilon_c \quad (7)$$

$$\epsilon_c = -\lambda C' \quad (8)$$

El valor de landa (multiplicador de Lagrange) es:

$$\lambda = \frac{\epsilon}{(1 + C')^2 + C'^2 + 1} \quad (9)$$

Por otra parte, aunque los principales objetivos de un circuito de trituración/molienda sea alcanzar grados de liberación de minerales, cumplir condiciones de superficie específica o promover la manejabilidad (Coello, 1999; King, 2012), su rendimiento será expresado normalmente en términos de reducción de tamaño; por tanto, es necesario, medir las distribuciones de tamaño de la alimentación, producto final y, en ocasiones, de las corrientes intermedias del circuito (Napier-Munn, et al., 2005).

El análisis de la distribución de tamaños de un producto molido consiste en registrar el peso en porcentaje del pasante acumulado en cada tamiz de una serie dada. Es muy importante conocer la distribución de tamaños de la muestra de mineral a estudiar; para ello se somete a un proceso de tamizado o análisis de tamaños (Wills & Finch, 2016), este se realiza haciendo pasar una cantidad conocida de material a través de una serie de tamices con abertura de malla cada vez más pequeña.

El material que queda entre dos tamices consecutivos se pesa para, posteriormente, calcular el porcentaje en peso de cada fracción de tamaño. La usual escala de tamices estándar (Austin & Concha, 1994; Fuerstenau & Han, 2003) consiste en una serie de tamices con aberturas diferenciadas por  $\sqrt{2}$ , basada sobre un tamiz de 200 mallas de abertura igual a 74,2  $\mu\text{m}$ .

Existen muchas formas de registrar los resultados, el más común es representar gráficamente el pasante acumulado en porcentaje en función del tamaño de partícula. Esto puede hacerse en escala cartesiana–cartesiana, pero tiene la desventaja de que los puntos en la región de los finos tiendan a congestionarse; para evitar eso, se realiza el cambio de escala a logaritmo–cartesiana (Álvarez, 2010).

Es útil, a menudo, representar las distribuciones de tamaño por medio de una función matemática, con el fin de representar gráficamente una curva uniforme racional a través de los puntos experimentales o para encapsular la distribución de tamaño en un menor número de parámetros ajustados, los que pueden utilizarse en otros cálculos como modelado y simulación (Napier-Munn, et al., 2005).

Las dos funciones de distribución de tamaño usadas comúnmente, para la caracterización de los materiales, son las funciones de Gaudin–Schuhmann y Rosin–Rammler (Napier-Munn, et al., 2005; King, 2012; Wills & Finch, 2016; Gupta & Yan, 2016).

La función de Gaudin–Schuhmann es la distribución más usada en América, y está dada por:

$$P(x) = 100 \times \left(\frac{x}{k}\right)^m \quad (10)$$

Despejando convenientemente y tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = m \log x - m \log k \quad (11)$$

Como  $m$  y  $k$  son constantes, es natural que la gráfica de  $\log(P(x)/100)$  en función de  $\log x$  sea una línea recta de pendiente  $m$  e intercepto  $m \log k$ .

Además, cuando  $P(x) = 100 \%$ ,  $x = k$ . Estos dos parámetros caracterizan el tamaño de la muestra.

La función de Rosin–Rammler es la distribución más usada en Europa, y se representa mediante:

$$P(x) = 100 \times \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^n}\right) \quad (12)$$

Despejando convenientemente y tomando dos veces logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = n \ln x - n \ln a \quad (13)$$

Los parámetros  $a$  y  $n$  se obtienen de la pendiente de la línea recta y de la intersección de esta con el eje horizontal correspondiente a  $P(x) = 63,2 \%$ , respectivamente, al representar el  $\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right)$  en función del  $\ln x$ . Ambas constantes completan la descripción de la distribución de tamaños de la muestra.

En contraste a la distribución de Gaudin–Schuhmann, la función de Rosin–Rammler, usualmente, es el que mejor se ajusta para un intervalo de tamaño de partículas gruesas, siendo su principal desventaja, apoyarse en una forma compleja de la función de distribución y por consiguiente la necesidad de coordenadas especiales para su representación gráfica (Kelly & Spottiswood, 1982; Fuerstenau & Han, 2003).

Por su parte, Harris (1971) propone el uso de la función de Rosin–Rammler, como la mejor para describir las distribuciones de tamaño en el procesamiento de minerales. No obstante, en algunas aplicaciones la función de Gaudin–Schuhmann, es más utilizado que el método de Rosin–Rammler, este último, mayormente es empleado en el estudio de la preparación de carbón, para lo cual fue desarrollado originalmente (Wills & Finch, 2016).

Sin embargo, se pueden encontrar algunas formas funcionales que se ajustan razonablemente a los datos experimentales (Fuerstenau & Han, 2003). Una de

ellas, es la función propuesta por Ouchterlony (2003), denominada función Swebrec, cuya expresión matemática está dada por:

$$P(x) = 100 \times \left( \frac{1}{1 + \left[ \frac{\ln\left(\frac{x_{max}}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x_{max}}{x_{50}}\right)} \right]^b} \right) \quad (14)$$

Para  $0 < x < x_{max}$ . Esta función de distribución acumulativa puede tomar cualquier valor entre 0 – 100 % y, cuando  $x = x_{max}$ ,  $P(x) = 100$  % y  $x = x_{50}$ ,  $P(x) = 50$  % (Ouchterlony, 2010). La función ofrece un excelente ajuste para tamaños de partículas comprendidos entre 0,5 – 500 mm, con una bondad de ajuste promedio  $R^2$  de  $0,997 \pm 0,001$  (Ouchterlony, 2005).

Considerando todo lo anterior, el objetivo del presente trabajo es evaluar el grado de ajuste de los diferentes modelos de representación de las distribuciones granulométricas, previo ajuste de los valores de los productos de la molienda mediante la determinación de la carga circulante.

## 2 MATERIALES Y MÉTODOS

En el desarrollo del presente trabajo, la base de datos experimentales, con cargas de bolas del 40 y 45 %, fueron obtenidos de Coello (1993), ver tablas 1 y 2, respectivamente. Para evaluar la calidad de ajuste los modelos de distribución de tamaños entre los datos experimentales ajustados, mediante el cálculo de la carga circulante, y los valores obtenidos por dichas funciones, se empleó el coeficiente correlación  $R^2$ .

Para el análisis de la homogeneidad de las varianzas ( $S^2$ ) entre los valores experimentales ajustados y los valores obtenidos por las funciones de distribución, se empleó criterio estadístico de Cochran (C), y para medir el grado de dispersión entre las mismas (reproducibilidad), la desviación o error estándar ( $\sigma$ ) (Mitrofánov, et al., 1982; Spiegel, et al., 2001).



### 3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la tablas 1 y 2 se muestran los valores de la carga circulante y los contenidos de los productos ajustados, determinados por las ecuaciones (1), (3), (5) y (7) para cargas de bolas del 40 y 45 %, respectivamente.

**Tabla 1** Valores de la carga circulante y los contenidos de las clases granulométricas recalculados (carga de bolas: 40 %)

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, °	Tamaño, mm	Contenidos*, %			C'(i)	ε	Contenidos recalculados, %			ε
					f'	C	P			f <sub>r</sub> '	c <sub>r</sub>	p <sub>r</sub>	
1	+	+	+	0,149	82,25	63,77	92,21	0,33	-3,90	84,05	63,32	90,85	0
				0,074	72,10	34,78	79,63		4,72	69,92	35,31	81,27	0
				0,044	59,20	31,52	72,04		-3,76	60,94	31,09	70,73	0
2	+	-	-	0,149	72,77	43,75	93,19	0,53	-5,17	74,96	43,00	91,76	0
				0,074	68,99	43,17	77,65		4,91	66,91	43,89	79,01	0
				0,044	57,67	37,16	67,33		1,12	57,19	37,32	67,64	0
3	-	+	-	0,149	75,62	47,87	88,4	0,75	7,97	72,60	49,16	90,13	0
				0,074	63,84	45,43	82,87		-5,26	65,83	44,57	81,73	0
				0,044	57,95	41,23	77,89		-7,44	60,77	40,02	76,28	0
4	-	-	+	0,149	86,30	54,12	84,86	0,03	2,48	85,06	54,16	86,06	0
				0,074	58,10	39,57	64,71		-6,01	61,10	39,47	61,80	0
				0,044	43,8	34,81	40,57		3,52	42,04	34,87	42,27	0
5	+	+	-	0,149	73,85	55,44	90,79	0,28	-11,76	79,39	54,22	86,47	0
				0,074	73,77	45,68	83,68		-2,01	74,72	45,47	82,94	0
				0,044	76,13	40,92	78,28		7,75	72,48	41,72	81,13	0
6	+	-	+	0,149	85,21	54,63	92,45	0,47	7,10	82,12	55,61	94,55	0
				0,074	69,97	42,29	84,21		-1,26	70,52	42,11	83,84	0
				0,044	57,57	34,81	76,26		-8,01	61,06	33,69	73,89	0
7	-	+	+	0,149	69,21	54,78	95,05	2,08	4,13	68,35	55,36	95,33	0
				0,074	59,17	46,17	88,91		-2,74	59,74	45,79	88,72	0
				0,044	53,72	42,20	79,75		-2,09	54,16	41,90	79,61	0
8	-	-	-	0,149	64,40	54,92	89,21	1,29	-12,54	68,02	52,88	87,63	0
				0,074	53,30	45,33	71,75		-8,13	55,65	44,00	70,73	0
				0,044	47,69	33,04	54,12		12,54	44,07	35,08	55,70	0

\* Datos obtenidos de Coello (1993)

Los contenidos de los productos de la molienda son variables aleatorias, supeditadas no solo a los cambios de valor (magnitud) en cada medición, dado a que están sujetos a la fuerte influencia de errores casuales, sistemáticos e incluso graves cometidos durante la realización del experimento.

Por esta razón, los valores de **C'** minimizan los efectos de estas fluctuaciones e incongruencias en los valores del contenido de los diferentes productos, ya que

sus valores hacen mínimo la suma cuadrática de los residuos, y por ende, resultan más cercanos a los valores reales de estas variables (Coello, 2015).

Los valores recalculados de los contenidos de las clases granulométricas de los productos coinciden con el “mejor ajuste” de la carga circulante. El cálculo del residuo ( $\epsilon$ ) con estos “nuevos contenidos” por la ecuación (2) confirma la minimización de los residuos en el cálculo de la carga circulante por la ecuación (1).

**Tabla 2** Valores de la carga circulante y los contenidos de las clases granulométricas recalculados (carga de bolas: 45 %)

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, °	Tamaño, mm	Contenidos*, %			C'(i)	ε	Contenidos de la clase recalculados, %			ε
					f'	C	p			f <sub>r</sub> '	c <sub>r</sub>	p <sub>r</sub>	
1	+	+	+	0,149	87,58	54,66	95,66	0,24	-0,16	87,66	54,65	95,60	0
				0,074	79,22	39,70	85,08		3,65	77,48	40,03	86,49	0
				0,044	64,13	39,20	75,71		-5,58	66,80	38,68	73,56	0
2	+	-	-	0,149	67,67	64,00	97,09	6,42	-5,84	68,12	63,61	97,03	0
				0,074	50,41	44,66	86,92		0,39	50,38	44,69	86,92	0
				0,044	44,91	39,03	79,38		3,27	44,66	39,25	79,41	0
3	-	+	-	0,149	81,03	62,71	97,67	1,58	12,32	77,90	64,62	98,88	0
				0,074	61,31	48,54	88,16		-6,67	63,00	47,50	87,50	0
				0,044	50,20	42,06	80,34		-17,28	54,59	39,37	78,64	0
4	-	-	+	0,149	85,28	49,41	94,06	0,42	6,45	82,42	50,26	96,07	0
				0,074	69,21	38,41	87,3		-5,02	71,44	37,75	85,74	0
				0,044	60,56	37,93	73,56		-3,39	62,07	37,48	72,50	0
5	+	+	-	0,149	85,34	65,60	97,41	0,60	-0,29	85,46	65,56	97,34	0
				0,074	76,89	46,12	87,17		8,09	73,58	47,35	89,24	0
				0,044	53,49	38,73	78,77		-16,47	60,22	36,21	74,55	0
6	+	-	+	0,149	70,63	61,04	95,92	3,47	8,00	69,55	61,88	96,16	0
				0,074	52,58	46,46	84,2		-10,36	53,98	45,37	83,89	0
				0,044	46,51	39,94	71,33		-2,02	46,78	39,73	71,27	0
7	-	+	+	0,149	81,93	51,51	96,29	0,61	4,27	80,20	52,17	97,36	0
				0,074	66,17	43,86	86,9		-7,06	69,03	42,77	85,12	0
				0,044	59,77	33,46	74,84		1,05	59,34	33,62	75,10	0
8	-	-	-	0,149	79,46	60,08	97,02	0,69	-4,26	81,13	59,40	96,03	0
				0,074	61,37	22,37	85,1		3,02	60,19	22,85	85,80	0
				0,044	53,13	17,18	78,77		-0,98	53,51	17,02	78,54	0

\* Datos obtenidos de Coello (1993)

Las tablas 3 al 5 y 6 al 8 muestran los valores de los coeficientes de correlación  $R^2$ , C y  $\sigma$  entre los contenidos de los productos ajustados ( $f'_r$ ,  $c_r$  y  $p_r$ ) y los valores, de estos, obtenidos por los modelos de distribución, para un 40 y 45 % de carga de bolas, respectivamente.

Según los valores de los criterios de Cochran y su valor crítico, en ambos casos, no existe diferencia significativa en la varianza entre los valores de los contenidos de los tamaños experimentales ajustados y los determinados por los modelos, puesto que, el error relativo, para estos, son menores que el 5 %. Consecuentemente, el tipo de modelo de distribución, determinará la calidad de ajuste de los valores de los contenidos acumulativos.

**Tabla 3** Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para la descarga del molino (carga de bolas: 40 %)

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, °	Gaudin – Schuhmann			Rosin - Rammler			Función Swebrec		
				R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	Σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ
1	+	+	+	1,0000	0,0004	0,0206	0,9951	0,6666	0,8164	0,9967	0,8960	0,9466
2	+	-	-	0,9693	2,4607	1,5687	0,9825	1,3853	1,1770	0,9711	3,7461	1,9355
3	-	+	-	0,9993	0,0255	0,1597	1,0000	0,0008	0,0287	0,9995	0,7744	0,8800
4	-	-	+	0,9872	6,5135	2,5522	0,9998	0,1102	0,3320	0,9931	16,2533	4,0315
5	+	+	-	0,9895	0,1311	0,3621	0,9839	0,2010	0,4483	0,9884	0,5912	0,7689
6	+	-	+	0,9955	0,5086	0,7132	1,0000	0,0018	0,0429	0,9970	3,3715	1,8362
7	-	+	+	1,0000	0,0015	0,0385	0,9988	0,0593	0,2434	0,9999	0,8462	0,9199
8	-	-	-	0,9845	2,3025	1,5174	0,9932	0,9782	0,9891	0,9862	9,1122	3,0186
<b>Media</b>				0,9906	1,4930	0,8665	0,9942	0,4254	0,5097	0,9915	4,4489	1,7921
<b>S<sup>2</sup><sub>max</sub></b>					6,5135			1,3853			16,2533	
<b>ΣS<sup>2</sup></b>					11,9439			3,4033			35,5909	
<b>Cochran<sub>cal</sub></b>					0,5453			0,4070			0,4567	
<b>Cochran<sub>tab</sub></b>					0,6798			0,6798			0,6798	

**Tabla 4** Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para el

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, °	Gaudin - Schuhmann			Rosin – Rammler			Función Swebrec		
				R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ
1	+	+	+	0,9526	16,1814	4,0226	0,9356	20,3804	4,5145	0,9770	8,8629	2,9771
2	+	-	-	0,5332	5,9493	2,4391	0,5403	5,8440	2,4174	0,4880	7,1911	2,6816
3	-	+	-	0,9878	0,2567	0,5067	0,9904	0,2014	0,4487	0,9727	7,5381	2,7456
4	-	-	+	0,9786	2,2531	1,5010	0,9711	2,9671	1,7225	0,9925	1,4427	1,2011
5	+	+	-	0,9890	0,4567	0,6758	0,9850	0,6178	0,7860	0,9976	0,4391	0,6627
6	+	-	+	0,9996	0,0529	0,2299	0,9999	0,0079	0,0888	0,9996	0,6169	0,7855
7	-	+	+	0,9867	0,6463	0,8040	0,9819	0,8696	0,9325	0,9966	0,5573	0,7465
8	-	-	-	0,9799	1,6400	1,2806	0,9860	1,1207	1,0586	0,9807	3,3272	1,8241
<b>Media</b>				0,9259	3,4295	1,4325	0,9238	4,0011	1,4961	0,9256	3,7469	1,7030
<b>S<sup>2</sup><sub>max</sub></b>					16,1814			20,3804			8,8629	
<b>ΣS<sup>2</sup></b>					27,4364			32,0089			29,9754	
<b>Cochran<sub>cal</sub></b>					0,5898			0,6367			0,2957	
<b>Cochran<sub>tab</sub></b>					0,6798			0,6798			0,6798	

producto recirculado (carga de bolas: 40 %)

Los valores de los coeficientes de correlación  $R^2$ , para el 40 % de carga de bolas, muestran que a pesar del tipo de modelo de distribución de tamaño, en todo los casos, existe un alto grado de dependencia lineal entre los valores

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, °	Gaudin - Schuhmann			Rosin - Rammler			Función Swebrec		
				R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ
1	+	+	+	0,9786	2,1925	1,4807	0,9979	0,2244	0,4738	0,9866	5,6691	2,3810
2	+	-	-	0,9912	1,3033	1,1416	0,9996	0,0640	0,2529	0,9961	4,3856	2,0942
3	-	+	-	0,9998	0,0096	0,0977	0,9919	0,4063	0,6374	0,9988	1,9920	1,4114
4	-	-	+	0,9862	7,2455	2,6917	0,9998	0,1043	0,3230	0,9931	16,6680	4,0826
5	+	+	-	0,9920	0,0593	0,2435	0,9858	0,1047	0,3236	0,9905	0,4176	0,6462
6	+	-	+	0,9905	1,0247	1,0123	0,9986	0,1673	0,4090	0,9965	3,5280	1,8783
7	-	+	+	0,9599	2,5133	1,5853	0,9956	0,3033	0,5507	0,9738	3,8668	1,9664
8	-	-	-	0,9874	3,3427	1,8283	0,9999	0,0371	0,1925	0,9917	6,5839	2,5659
<b>Media</b>				0,9857	2,2114	1,2602	0,9961	0,1764	0,3954	0,9909	5,3889	2,1283
<b>S<sup>2</sup><sub>max</sub></b>					7,2455			0,4063			16,6680	
<b>ΣS<sup>2</sup></b>					17,6908			1,4113			43,1109	

experimentales ajustados y los obtenidos a partir de los modelos. Siendo el modelo de Rosin–Rammler el de mayor linealidad para la descarga del molino ( $R^2=0,9942$ ) y producto final ( $R^2=9961$ ), mientras que, para el producto recirculado, el modelo de mayor dependencia lineal, es el modelo de Gaudin–Schuhmann ( $R^2=0,9259$ ).

**Tabla 5** Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para el producto final (carga de bolas: 40 %)

<b>Cochran<sub>cal</sub></b>	0,4096	0,2879	0,3866
<b>Cochran<sub>tab</sub></b>	0,6798	0,6798	0,6798

**Tabla 6** Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para la

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, d,	Gaudin - Schuhmann			Rosin - Rammler			Función Swebrec			
				R <sup>2</sup> Gaudin - Schuhmann	R <sup>2</sup> Rosin - Rammler	σ	R <sup>2</sup> Función Swebrec	σ					
1	+	+	+	0,9816	2,6276	1,4239	0,9973	0,3040	0,5914	0,9868	4,7672	2,1834	
2	+	+	+	0,9091	3,6183	2,7828	0,9009	8,9692	2,2098	0,9987	12,8186	3,7996	
3	+	+	-	0,9994	0,0898	0,0986	0,9936	6,8904	0,9478	0,9987	8,3670	1,5218	
4	-	+	+	0,9939	0,8283	0,8627	0,9928	0,0292	0,1388	0,9999	0,9841	0,8383	
5	+	+	+	0,9826	7,4981	2,7260	0,9926	7,9262	2,8608	0,9980	57,3689	2,7148	
6	+	+	+	0,9992	0,6766	0,8169	0,9999	0,6562	0,2393	0,9999	10,1906	3,3898	
7	+	+	+	0,9823	0,8088	0,8963	0,9941	0,8840	0,2882	0,9943	3,0282	1,8240	
8	-	+	+	0,9886	4,6960	2,2868	0,9878	9,2072	3,0408	0,9822	3,8219	1,9709	
8	-	-	-	<b>Media</b>	<b>0,9863</b>	<b>16,0516</b>	<b>4,0894</b>	<b>0,9867</b>	<b>20,2801</b>	<b>4,4782</b>	<b>0,9923</b>	<b>5,8200</b>	<b>2,3046</b>
				<b>Media</b>	0,9605	4,9896	1,9277	0,9538	6,0422	2,1163	0,9743	10,8106	2,6468
				<b>ΣS<sup>2</sup></b>		16,4888			18,2784			40,3232	
				<b>Cochran<sub>cal</sub></b>		0,2787			0,5059			0,3178	
				<b>Cochran<sub>tab</sub></b>		0,6798			0,6798			0,6798	

descarga del molino (carga de bolas: 45 %)

El análisis de la homogeneidad de las varianzas residuales, para las mismas condiciones, demuestran que no existen diferencias significativas en el ajuste de los modelos para cada uno de los productos. Se obtienen los mismos resultados comparando la reproducibilidad de los modelos para un mismo régimen de trabajo.

**Tabla 7** Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para el producto recirculado (carga de bolas: 45 %)

$S^2_{max}$	16,1556	20,0601	51,1909
$\Sigma S^2$	39,9162	48,3388	84,0806
$Cochran_{cal}$	0,4047	0,4150	0,6088
$Cochran_{tab}$	0,6798	0,6798	0,6798

**Tabla 8** Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para el producto final (carga de bolas: 45 %)

N°	Q <sub>a</sub> , m <sup>3</sup> /h	Q <sub>b</sub> , m <sup>3</sup> /h	α, °	Gaudin - Schuhmann			Rosin - Rammler			Función Swebrec		
				R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	σ
1	+	+	+	0,9523	5,9199	2,4331	0,9962	0,5212	0,7219	0,9696	7,1709	2,6779
2	+	-	-	0,9992	0,0615	0,2481	0,9803	1,7821	1,3350	0,9996	2,5560	1,5988
3	-	+	-	0,9980	0,2112	0,4596	0,9614	5,2861	2,2991	0,9998	3,2302	1,7973
4	-	-	+	0,9627	5,2766	2,2971	0,9994	0,1011	0,3180	0,9783	6,7066	2,5897
5	+	+	-	0,9201	10,7920	3,2851	0,9927	1,1843	1,0883	0,9453	12,1340	3,4834
6	+	-	+	0,9822	2,8061	1,6751	0,9987	0,2336	0,4834	0,9925	4,8211	2,1957
7	-	+	+	0,9960	0,5029	0,7091	0,9843	2,3066	1,5188	0,9999	3,2642	1,8067
8	-	-	-	0,9998	0,0178	0,1333	0,9826	1,4953	1,2228	0,9993	2,5767	1,6052
<b>Media</b>				0,9763	3,1985	1,4051	0,9869	1,6138	1,1234	0,9855	5,3075	2,2193
$S^2_{max}$					10,7920			5,2861			12,1340	
$\Sigma S^2$					25,5881			12,9104			42,4597	
$Cochran_{cal}$					0,4218			0,4094			0,2858	
$Cochran_{tab}$					0,6798			0,6798			0,6798	

Considerando el valor promedio del error de reproducibilidad, el modelo de mejor ajuste, para la descarga del molino y producto final, fue el modelo de Rosin–Rammler, con valores promedios de 0,5097 % y 0,3954 % respectivamente; y para el producto recirculado, el modelo que mejor ajuste presentó fue el modelo de Gaudin–Schuhmann con un valor promedio de 1,4325 %.

Los valores promedio de R<sup>2</sup> de cada uno de los modelos para el producto final, con una carga de bolas del 45 %, están ligeramente por debajo de los valores, para el mismo producto, con una carga de bolas del 40 %. Se observa un comportamiento contrario para el producto recirculado; mientras que, para la descarga del molino, los modelos de Rosin–Rammler y Gaudin–Schuhmann presentaron comportamientos similares al producto final, no siendo así, la función Swebrec.

En todos los casos, se conserva el alto grado de dependencia lineal de los modelos. De acuerdo con Kelly & Spottiswood (1982) y Álvarez, et al. (2016),

en algunos casos, los datos de reducción de tamaño pueden ser lineales en la mayor parte del rango de tamaño, particularmente en los tamaños finos.

Los resultados del análisis de la homogeneidad de las varianzas para la carga de bolas del 45 % son similares para la carga de bolas del 40 %. Es decir, considerando el valor promedio del error de reproducibilidad, el modelo de mejor ajuste, para la descarga del molino y producto producto final, fue el modelo de Rosin - Rammler, cuyos valores medios fueron de 1,1942 % y 1,1234 % respectivamente; y para el producto recirculado, el modelo que mejor ajuste presentó fue el modelo de Gaudin – Schuhmann con un valor medio de 1,9277 %.

#### **4 CONCLUSIÓN**

A pesar del alto grado de linealidad de todos los modelos; el modelo que mejor ajuste presentó (menor error de reproducibilidad), para la descarga del molino y el producto final (para ambas condiciones de carga de bolas), fue el modelo de Rosin–Rammler, y, para el producto recirculado, el modelo de Gaudin–Schuhmann.

#### **5 BIBLIOGRAFÍA**

1. Álvarez, R. B., 2010. *Ánàlisis de la influencia de los modelos de distribución de tamaño de partículas en la determinación de consumos energéticos en molienda mediante el método de Bond*, Oviedo, España: Tesis de Doctorado. Universidad de Oviedo.
2. Álvarez, R. B., González, G. G., Coello, V. A. L. & Menéndez, A. J. M., 2016. Product size distribution function influence on interpolation calculations in the Bond ball mill grindability test. *International Journal of Mineral Processing*, Issue 157, pp. 16 - 20.
3. Austin, L. G. & Concha, F. A., 1994. *Diseño y Simulación de Circuitos de Molienda y Clasificación*. Concepción, Chile: CYTED.
4. Coello, V. A. L., 1993. *Sobersensstobovanie tehnologii izmelchenia lateritovij rud*, Saint Petersburg: Dis. na izk. uch. step. Kan. tecn. nauk. Inst. Mejanobr.

5. Coello, V. A. L., 1999. Curso de preparación mecánica de menas y minerales , Moa, Holguín.: Dpto. Metalurgia ISMMM.
6. Coello, V. A. L., 2015. Procedimiento para la determinación de la carga circulante en circuitos cerrados de trituración y molienda. Minería y Geología, 31(2), pp. 66 - 79.
7. Coello, V. A. L., Marrero, R. S. & Hernández, F. A., 1994. Control de la carga interior del molino a través de terceros parámetros. Minería y Geología , 11(1), pp. 35 - 39.
8. Fuerstenau, M. C. & Han, K. N., 2003. Principles of Mineral Processing. Littleton, Colorado: Society for Mining, Metallurgy and Exploration, Inc (SME).
9. Gupta, A. & Yan, D., 2016. Mineral Processing Design and Operation. An Introduction. Segunda Edición ed. Amsterdam: Elseiver.
10. Harris, C., 1971. Graphical presentation of size distribution data: an assessment of current practice.. Trans. IMM Sec. C 80 (Sept.), 133..
11. Kelly, E. & Spottiswood, D., 1982. Introduction to Mineral Processing. New York: John Wiley and Sons.
12. King, P., 2012. Modeling of Simulation of Mineral Processing. Segunda Edición ed. Englewood, Colorado: SME.
13. Mitrofánov, S. I., Barski, L. A. & Samygin, V. D., 1982. Investigación de la capacidad de enriquecimiento de los minerales. Moscu: Mir.
14. Napier-Munn, T. J., Morrel, S., Morrison, R. D. & Kojovic, T., 2005. Circuitos de Trituración de Mineral Su Operación y Optimización. Queensland, Australia: JKMRRC.
15. Ouchterlony, F., 2003. Bend it like Beckham or a widerange yet simple fragment size distribution for blasted and crushed rock, Leoben, Austria1: Montanuniversität: EU project GRD-2000-25224. Less Fines project int. techn. rpt no. 78..



16. Ouchterlony, F., 2005. The Swebrec function: linking fragmentation by blasting and crushing. *Mining Techn. (Trans. of the Inst. of Mining & Met. A)*, Issue 114, pp. A29 - A44.
17. Ouchterlony, F., 2010. *Fragmentation characterization; the Swebrec function and its use in blast engineering*. London, ISBN 978-0-415-48296-7, *Rock Fragmentation by Blasting – Sanchidrián (ed)*.
18. Spiegel, M. R., Schiller, J. & Srinivasan, R., 2001. *Probability and Statistics*. New York: McGraw Hill, .
19. Wills, B. A. & Finch, J. A., 2016. *Mineral Processing Technology: An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery*. s.l.:Elseiver.